**高数复习资料（前三章）**

**考点一：解析式函数求定义域**

函数的概念：非空集合到数集上的映射称为函数,记作，，,称为函数的定义域，称为对应法则.

函数的两个基本要素：定义域、对应法则

解析式函数: ……解析式表达式

定义域：使解析式有意义的自变量的取值范围

1. 分式的分母不为0
2. 开偶次方根，被开方数非负
3. 对数的真数大于0；底数大于0，不等于1
4. 正切的角不等于kπ+π/2，余切的角不等于kπ
5. 反正弦、反余弦，其值在[-1,1]之间
6. 实际意义

方法一：使解析式有意义，列出不等式组，解出的范围

方法二：取特殊值法验证（最大端点值）

 例1、函数的定义域是 .

 例2、函数的定义域是 .

 例3、为使函数与构成复合函数，那么x的取值范围应该是 .

 例4、函数的定义域是 .

**考点二：求复合函数的函数值或复合函数的外层函数**

1. 复合函数：设变量是变量的函数，变量是变量的函数.若对于在某范围中的每一个确定的值，依据一个确定的规则总有的值与之对应，而对于的此确定值，按确定的规则有确定的值与之对应，则称为的复合函数.

若，，则；称为外层函数， 为内层函数，为复合函数.

1. 常见题型:

题型一：已知外层函数，求复合函数或复合函数值

，

方法：（代入法）将挖去，再将代入即可.

例1、已知，求，，.

例2、已知，求.

题型二：已知复合函数，求外层函数

 

方法1：（设元法/换元法）令，求出，即求出.

方法2：(凑成法)由求出，即求出.

例3、已知，求.

例4、已知，求.

例5、已知，求.

题型三：已知复合函数，求另一个复合函数



方法：

例6、已知，求.

题型四：已知复合函数和外层函数，求内层函数

，

方法：将变形为的形式，求出.

例7、已知，，求.

**考点三：抽象函数求定义域**

抽象函数: ……抽象表达式

题型一：已知外层函数定义域A，求复合函数的定义域

，的定义域

方法：令，求出的范围.

例1、已知的定义域为，求,,的定义域.

题型二：已知复合函数定义域A，求外层函数的定义域

，的定义域

方法：令，，求出的范围.

例2、已知的定义域为，求的定义域.

题型三：已知复合函数定义域A，求另一个复合函数的定义域

，的定义域

方法：题型二题型一.

例3、已知的定义域为，求的定义域.

**考点四：函数奇偶性的判定**

1. 函数奇偶性（整体）

设的定义区间D关于原点对称（即若,则），如果对于D内的任意点，恒有，则称为D内的偶函数，如果恒有，则称为D内的奇函数.

方法1：定义法

偶函数

奇函数

方法2：和差法

偶函数

奇函数

方法3：图像法

图像关于轴对称偶函数

图像关于原点对称奇函数

方法4：结论法

1. 两个偶函数经四则运算和复合运算是偶函数.
2. 两个奇函数的和、差、复合是奇函数，积、商是偶函数.
3. 一奇一偶非零函数的和、差是非奇非偶函数，积、商是奇函数，复合是偶函数.
4. 和为奇函数（）.
5. 设的定义域关于原点对称，那么函数为偶函数，为奇函数.
6. 定义域关于原点对称的任意函数，都可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和的形式.

**考点五：有关求反函数的问题**

设函数的定义域为，值域为.若对中的每一个，通过关系，有值与之对应，这就建立了与之间的函数关系，常称为的反函数，常记为.

函数存在反函数的充要条件：原函数是一一对应函数.

原函数与反函数关于直线对称.

题型一：

方法：

题型二：

方法：

例1、已知，求.

例2、设，求.

**考点六：无穷小量阶的比较**

* 1. 无穷小（大）量
1. 无穷小量

若或，则称在时的无穷小量.

若，则称在时为无穷小量.

 无穷小量简称无穷小，常用、、等表示.

注：

（1）、说一个函数是无穷小，必须指明自变量的变化趋势.

（2）、一个绝对值很小的常数不是无穷小量.

（3）、常数中只有数0是无穷小量.

1. 无穷大量

若或，则称在时的无穷大量.

若，则称在时为无穷大量.

 无穷大量简称无穷大，也用、、等表示.

注：

（1）、说一个函数是无穷大，必须指明自变量的变化趋势.

（2）、一个绝对值很大的常数不是无穷大量.

* 1. 无穷小（大）量的性质

1、，其中为无穷小量.

2、为无穷小量，为有界量，则也为无穷小量.

3、在同一变化过程中，如果是无穷大量，则是无穷小量，如果是无穷小量，则是无穷大量.

* 1. 无穷小的阶的比较

和是同一个变化过程中，同一个自变量的两个无穷小量且.

1、称是比高阶无穷小，记作.

2、称是比低阶无穷小.

3、称与同阶无穷小，当时，与称为等价无穷小，记作.

4、称是的阶无穷小（为正整数）.

注：

（1）、（）

（2）、，且存在

（3）、当时，；

；.

例1、当时，是的（ ）

A、低阶无穷小B、高阶无穷小C、等价无穷小D、同阶非等价无穷小

例2、当时，与等价的无穷小量是（ ）

A、B、C、D、

**考点七：分段函数求待定常数或讨论分段函数的连续性**

* 1. 连续函数的概念

1、定义一：

设函数在点的某邻域内有定义，且也属于的该邻域，若，则称在点处连续.

2、定义二：

设函数在点的某邻域内有定义，若，则称在点处连续.

注：上述两种定义本质是一样的，是连续性的两种等价定义.它们有三个共同的特点，构成了连续性的三个要素：

（1）、函数在点有定义；

（2）、当时，有极限；

（3）、极限值等于该点的函数值.

3、如果函数在内每点都连续，则称为内的连续函数.

 若，则称在点处左连续.

若，则称在点处右连续.

若函数在内连续，且在处右连续，在处左连续，则称在闭区间上的连续.

二、连续函数的性质

1、函数在处连续的充要条件：在处左连续，且在处右连续.

2、基本初等函数在其定义域内都是连续函数.

3、初等函数在其定义域内都是连续函数.

4、区间内单调连续函数的反函数在相应的区间内也是连续函数.

5、设，在处连续，则、、（）、（、可以复合时）在处也连续.

三、分段函数的连续性

1、在处连续.

2、在处连续.

例1、函数在处连续，求的值.

例2、函数在处连续，求的值.

**考点八：利用零点定理确定方程根的存在性或证明含有****的等式**

一、连续函数在闭区间上的性质

1、最值定理：设在上的连续，则在闭区间上必能取得最大值与最小值.

2、介值定理：设在上的连续，，则对于任意介于与之间的，必定存在，使得.

3、零点定理：设在上的连续，，则必定存在，使得.

注：零点定理常用来确定方程根的存在性或证明含有的等式.

二、解题的方法步骤

1、构造函数，将方程的一端减去另一端的代数式，且把即可.

2、说明函数在给定区间上满足零点定理的条件，即连续且两端点值异号.

3、利用零点定理说明方程根的存在性

例1、设函数在上连续，且,证明：至少存在一点，使得.

例2、设函数和均在上连续，且，，证明：至少存在一点，使得.

**考点九：指出函数间断点的类型**

1. 函数间断点的定义

如果在处不连续，则称为的间断点.

注：连续性的三个要素之一得不到满足的点，即为函数的间断点，因此判断函数间断点的步骤是：

1、考察在处有无定义，若无定义，则为的间断点.

2、如果存在，再考察是否存在，如果不存在，则必为的间断点.

3、如果存在，再考察极限值是否等于，如果，则必为的间断点.

1. 函数间断点的类型

1、当与都存在时，则称为的第一类间断点.

注：

（1）、如果存在，在处无定义或，则为的可去间断点.

（2）、如果与都存在，但不相等，则为的跳跃间断点.

2、当与之一不存在时，则称为的第二类间断点.

注：

（1）、当或时，，则称为的无穷间断点.

（2）、当时，不存在，呈来回振荡情形，则称为的振荡间断点.

例1、函数的间断点是 .

例2、函数，则是函数的（ ）

A、连续点 B、可去间断点 C、跳跃间断点 D、第二类间断点

**考点十、导数的复合运算法则**

两个可导函数复合而成的复合函数的导数等于函数对中间变量的导数乘上中间变量对自变量的导数。

设，复合成，若在点处可导，在相应点可导，则复合函数在点处可导，且有链式法则，其中为中间变量.上述链式法则可以用于多层复合的情形.

例1、函数的导数为\_\_\_\_\_\_\_\_.

**考点十一、隐函数求导法则**

若已知，求时，一般按下列步骤进行求解：

（1）、若方程，能化为的形式，则用前面我们所学的方法进行求导；

（2）、若方程，不能化为的形式，则是方程两边对进行求导，并把看成的函数，用复合函数求导法则进行.

例1、设，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

例2、设，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**考点十二、由参数方程确定的函数的求导**

设是由所确定.其中，为可导函数，且，则.且.

例1、参数方程确定函数，求.

例2、参数方程确定函数，求.

**考点十三、对数求导法则**

1、根据隐函数求导的方法，对某一函数先取函数的自然对数，然后在求导.

注：此方法特别适用于幂函数、连乘函数的求导问题.

如，两端取对数有化幂指函数为隐函数.

如（为整数），对两端取对数

化为隐函数.

 **2、**若干函数连乘、连除、乘方或开方所构成的复合函数求导

例1、函数，求.

例2、函数，求.

**考点十四、求曲线的切线方程或法线方程**

如果函数在点处的导数存在，在几何上表明曲线在点处存在切线，且切线的斜率为.

由解析几何可知，曲线在点处的切线方程为：

.

如果，则曲线在点处的法线方程为：

.

如果，则为曲线在点处的水平切线.

例1、过曲线在点处的法线方程是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

例2、已知函数可导，且，求在处的切线斜率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**考点十五、 求函数的单调增区间或减区间**

1、把这里区间换成闭区间及半开半闭或无穷区间结论都正确.

1. 单调区间的分界点是的点或不存在的点.
2. 求单调区间的方法：

（1）、写出函数的定义域，并求.

（2）、求出的点或无意义的点，这些点把定义域分成若干个区间.

（3）、在每个区间上讨论的正负，确定单调区间.

对于连续可导的函数，可通过解不等式（或）得函数的单调区间.

1. 如果在区间内（或），但等号只在个别点处成立，则函数在内仍是单调增加（减少）.
2. 单调函数的导函数不一定是单调函数，如.

例1、函数的单调递增区间为\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

例2、若在上有，则曲线的单调递增为\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

例3、函数的单调减区间为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

例4、讨论函数的单调区间.

**考点十六、 求函数的极值或极值点**

求极值的一般步骤是：
    (1)、求；
    (2)、求的全部的解——驻点；
    (3)、判断在驻点两侧的变化规律，即可判断出函数的极值.

例1、已知函数在点处取得极大值2，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

例2、讨论函数的单调区间及极值.

例3、若是函数的极值点，则（ ）

A、必定存在，且

B、必定存在，但不一定等于零

C、可能不存在

D、必定存在

**考点十七、 利用罗尔中值定理确定方程根的存在性或证明含有的等式**

方法步骤：

(1)、构造函数，函数的导数等于方程的端减去另一端的代数式，且把即可.

（2）、函数在给定区间上满足罗尔定理的条件，即连续且可导.

（3）、运用罗尔中值定理，证明方程根的存在性或含有的等式.

例1、设函数在上连续，在内可导，证明：至少存在一点，使得.

例2、设函数在上连续，在内可导，且，证明：至少存在一点，使得.

**考点十八、利用拉格朗日中值定理证明连体不等式**

方法步骤：

1、构造函数，把中间项变形为两项之差或两项之差的比，观察哪函数，在哪个区间上，函数之差是上述之差.

2、求导，检验是否满足拉格朗日中值定理，利用定理把中间项变为固定的代数式.

3、对此代数式进行放大或缩小，完成不等式的证明.

例1、当时，证明：.

例2、当，时，.